

© International Baccalaureate Organization 2026

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2026

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2026

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 3

20 mai 2026

Zone A après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

1 heure 15 minutes

Instructions destinées aux élèves

- N'ouvrez pas cette épreuve d'examen avant d'avoir reçu l'autorisation de le faire.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 26]

Cette question vous demande d'explorer un jeu de hasard.

Un jeu de hasard consiste à tenter de gagner des bonbons qui se trouvent dans un panier et se joue en plusieurs tours. Les règles du jeu sont les suivantes :

- Le joueur commence le jeu avec au moins un bonbon.
- Au début de chaque tour, le joueur fait tourner une roue.
- Si la roue indique « gagnant », le joueur gagne un bonbon du panier ; sinon, il doit remettre un bonbon dans le panier.
- Le jeu continue jusqu'à ce que tous les bonbons soient gagnés par le joueur ou que le joueur n'ait plus de bonbons.

Considérons d'abord le cas où il y a un total de trois bonbons dans le jeu.

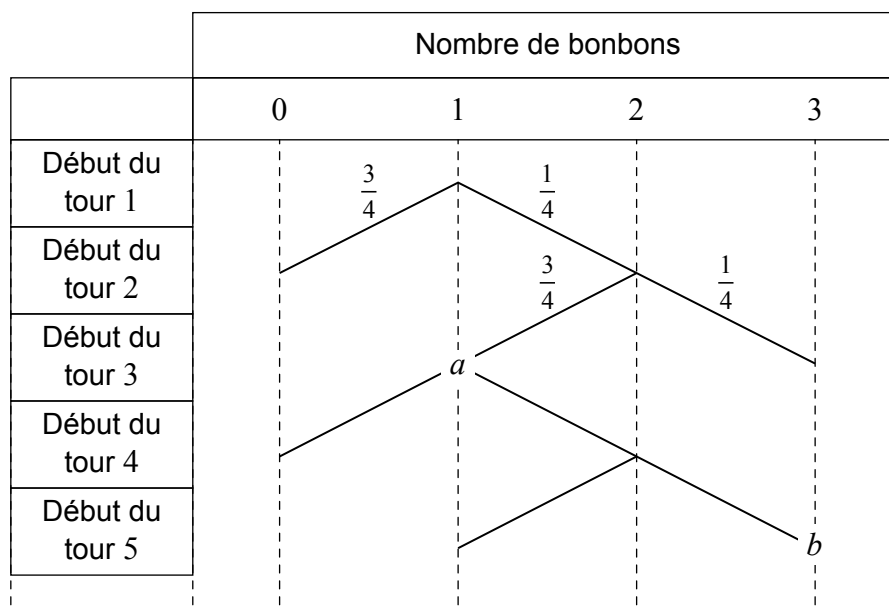
Fiona commence le jeu avec un bonbon et il y a deux bonbons à gagner dans le panier.

La probabilité de tomber sur « gagnant » à n'importe quel tour est de $\frac{1}{4}$, indépendamment du résultat de tout autre tour.

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Le diagramme suivant montre le nombre possible de bonbons que Fiona possède au début de chaque tour ainsi que les résultats possibles des premiers tours.



Si Fiona gagne au tour 1 , elle aura exactement deux bonbons au début du tour 2 .

Si elle perd au tour 1 , il ne lui restera plus de bonbons au début du tour 2 et le jeu se termine.

La probabilité que Fiona ait exactement un bonbon au début du tour 3 est a et la probabilité qu'elle ait trois bonbons au début du tour 5 est b .

(a) (i) Montrez que $a = \frac{3}{16}$. [1]

(ii) Trouvez la valeur de b . [2]

Au début du tour 5 , Fiona a exactement un bonbon.

(b) Écrivez la probabilité qu'elle ait encore un bonbon après deux autres tours. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Considérons maintenant le cas où il y a un total de w bonbons dans le jeu.

Soit R_n la probabilité que Fiona ait à la fin tous les w bonbons lorsqu'elle commence un tour avec n bonbons.

Si Fiona termine un tour sans bonbon, $n = 0$, la probabilité qu'elle ait à la fin tous les bonbons, R_0 , est donc nulle et le jeu se termine.

Pour $n > 0$, si Fiona gagne le prochain tour, elle aura $n + 1$ bonbons et la probabilité qu'elle ait à la fin tous les w bonbons est maintenant R_{n+1} .

De même, si Fiona perd le prochain tour, elle aura $n - 1$ bonbons et la probabilité qu'elle ait à la fin tous les w bonbons est maintenant R_{n-1} .

La probabilité que la roue tombe sur « gagnant » est désormais p , où $0 < p < 1$, et la probabilité que la roue tombe sur « pas gagnant » est q , où $q = 1 - p$ et $p \neq q$.

Au début de chaque tour, R_n est donnée par

$$R_n = qR_{n-1} + pR_{n+1}, \text{ où } n > 0.$$

Considérez le cas où $w = 4$ et $p = \frac{1}{4}$.

(c) Écrivez une expression pour R_2 en fonction de R_1 et R_3 . [1]

(d) On sait que lorsque Fiona commence un tour avec exactement un bonbon, la probabilité qu'elle gagne le jeu est $R_1 = 0,025$. Lorsqu'elle commence un tour avec exactement trois bonbons, la probabilité qu'elle gagne le jeu est $R_3 = 0,325$.

Trouvez la valeur de R_2 . [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Pour les parties suivantes de cette question, considérons le cas où il y a un total de w bonbons dans le jeu et la probabilité que la roue tombe sur « gagnant » est p .

(e) En exprimant R_n comme $(p + q)R_n$, montrez que $R_{n+1} - R_n = \frac{q}{p}(R_n - R_{n-1})$. [2]

(f) (i) À partir de là, trouvez une expression pour $R_2 - R_1$ en fonction de p , q et R_1 . [1]

(ii) Montrez que $R_3 - R_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 R_1$. [2]

(iii) Déduisez une expression pour $R_n - R_{n-1}$ en fonction de n , p , q et R_1 . [1]

(g) (i) En considérant $(R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + (R_4 - R_3) + \dots + (R_n - R_{n-1})$, ou par toute autre méthode, montrez que

$$R_n = R_1 \left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \right). \quad [4]$$

(ii) À partir de là, sachant que $R_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$, montrez que $R_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$. [4]

Il y a maintenant un grand nombre de bonbons dans le jeu.

Fiona débute le jeu avec m bonbons, où $p = 0,495$.

Une fois qu'elle a obtenu 10 bonbons supplémentaires, elle aura tous les bonbons et le jeu se termine.

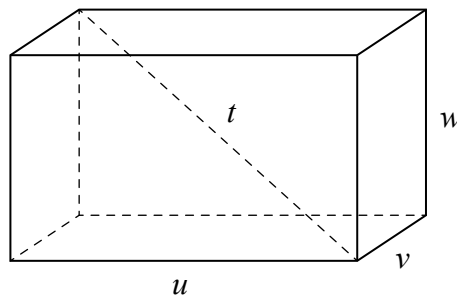
(h) Déterminez la valeur minimale de m pour que Fiona ait au moins 80 % de chances de gagner 10 bonbons supplémentaires. [4]

2. [Note maximale : 29]

Cette question vous demande d'explorer la relation entre les nombres complexes et un parallélépipède rectangle dont les dimensions et la diagonale intérieure sont des longueurs entières. Ce parallélépipède rectangle est appelé une boîte de Pythagore.

Une boîte de Pythagore, notée $PB(u, v, w, t)$, est un parallélépipède rectangle de dimensions $u \times v \times w$ et dont la diagonale intérieure est de longueur t , où $u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+$. Ceci est illustré dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



- (a) Pour le cas où $u = 9$, $v = 2$ et $w = 6$, trouvez la valeur de t . [2]

Les nombres complexes z_1 et z_2 sont utilisés pour générer une boîte de Pythagore, $PB(u, v, w, t)$, si

$$u = 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*), \quad v = 2 \operatorname{Im}(z_1 z_2^*), \quad w = |z_1|^2 - |z_2|^2 \text{ et } t = |z_1|^2 + |z_2|^2, \text{ où } u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+.$$

Inversement, pour toute boîte de Pythagore, $PB(u, v, w, t)$, il existe deux nombres complexes, z_1 et z_2 , qui satisfont u, v, w et t tels que définis ci-dessus.

Considérez les deux nombres complexes $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$.

- (b) (i) Trouvez une expression pour $z_1 z_2^*$ en fonction de a, b, c et d . [2]

- (ii) À partir de là, trouvez une expression pour v en fonction de a, b, c et d . [1]

- (c) Considérez le cas où $z_1 = 3 + 7i$ et $z_2 = c + 6i$ sont utilisés pour générer une boîte de Pythagore.

- (i) Montrez que $v = 14c - 36$. [1]

- (ii) Montrez que les seules valeurs possibles de c sont 3 et 4. [4]

- (iii) Pour $c = 4$, trouvez les valeurs de u, v, w et t . [5]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Il y a trois boîtes de Pythagore ayant une diagonale intérieure de longueur 23 .

- (d) Sachant que $23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$, déterminez les dimensions d'une de ces boîtes de Pythagore.

[6]

Les dimensions et la diagonale intérieure de la boîte de Pythagore, $PB(u, v, w, t)$, peuvent être utilisées pour former un nombre complexe, z , tel que $z = \frac{u + vi}{t - w}$.

Considérez la boîte de Pythagore $PB(26, 38, 43, 63)$.

- (e) Montrez que, pour cette boîte de Pythagore, $z = \frac{13 + 19i}{10}$.

[1]

Le nombre complexe z peut également s'écrire comme $\frac{z_1}{z_2}$, où z_1 et z_2 génèrent la boîte de Pythagore $PB(26, 38, 43, 63)$.

On sait que $\frac{z_1}{z_2}$ peut être exprimé comme $\frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$.

- (f) (i) En considérant $t - w$, montrez que $c^2 + d^2 = 10$.

[2]

- (ii) À partir de là, sachant que $c > d$, trouvez z_1 et z_2 .

[5]

Avertissement :

Le contenu utilisé dans les évaluations de l'IB est souvent extrait de sources authentiques issues de tierces parties. Les avis qui y sont exprimés appartiennent aux personnes à l'origine de leur création et/ou de leur publication, et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'IB. Parfois, des entreprises, produits ou individus fictionnels sont inclus dans les évaluations. Toute ressemblance avec des entités réelles serait purement fortuite. Toutes les marques commerciales™ ou déposées® incluses sont utilisées à des fins d'illustration uniquement, et leur utilisation n'implique aucune affiliation avec le Baccalauréat International ni aucune promotion de sa part.